Formulaire de trigonométrie circulaire et hyperbolique

1) Propriétés algébriques *(remplacer* cos *par* ch *et* sin *par* i.sh*)*

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$
$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$

$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{sh}\, b$
$\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{sh}\, b$

$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b + \mathrm{ch}\, a \cdot \mathrm{sh}\, b$
$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b - \mathrm{ch}\, a \cdot \mathrm{sh}\, b$

$\mathrm{th}(a+b) = \dfrac{\mathrm{th}\, a + \mathrm{th}\, b}{1 + \mathrm{th}\, a \cdot \mathrm{th}\, b}$

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$

$\mathrm{ch}^2 a - \mathrm{sh}^2 a = 1$
$\mathrm{ch}\, 2a = \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a = 2\,\mathrm{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2 a$
$\mathrm{sh}\, 2a = 2\,\mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{ch}\, a$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\mathrm{ch}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b = \frac{1}{2}\left[\mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b)\right]$$
$$\mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{sh}\, b = \frac{1}{2}\left[\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b)\right]$$
$$\mathrm{sh}\, a \cdot \mathrm{ch}\, b = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{sh}(a-b)\right]$$

Pour les relations suivantes, remarquer que : $\begin{cases} p = a+b \\ q = a-b \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a = \dfrac{p+q}{2} \\ b = \dfrac{p-q}{2} \end{cases}$.

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2} \cdot \sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{ch}\, p + \mathrm{ch}\, q = 2\,\mathrm{ch}\frac{p+q}{2} \cdot \mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$$
$$\mathrm{ch}\, p - \mathrm{ch}\, q = 2\,\mathrm{sh}\frac{p+q}{2} \cdot \mathrm{sh}\frac{p-q}{2}$$
$$\mathrm{sh}\, p + \mathrm{sh}\, q = 2\,\mathrm{sh}\frac{p+q}{2} \cdot \mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$$

Les relations suivantes sont notamment utiles pour certains calculs de primitives.

Si $t = \tan\dfrac{x}{2}$,

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Si $t = \mathrm{th}\dfrac{x}{2}$,

$$\mathrm{ch}\, x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$
$$\mathrm{sh}\, x = \frac{2t}{1-t^2}$$
$$\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

2) Dérivées *(intervalles à préciser)*

$\cos' x = -\sin x$

$\sin' x = \cos x$

$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\cot' x = -1 - \cot^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

$\arccos' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (pour $|x| < 1$)

$\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (pour $|x| < 1$)

$\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\text{arccot}' x = \dfrac{-1}{1+x^2}$

$\text{ch}' x = \text{sh}\, x$

$\text{sh}' x = \text{ch}\, x$

$\text{th}' x = 1 - \text{th}^2 x = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$

$\text{coth}' x = 1 - \text{coth}^2 x = \dfrac{-1}{\text{sh}^2 x}$

3) Relations diverses

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \text{sgn}\,(x) \cdot \dfrac{\pi}{2}$

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ (pour $|x| \leq 1$)

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ (pour $|x| \leq 1$)

$\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$