Annexe[9] *:*

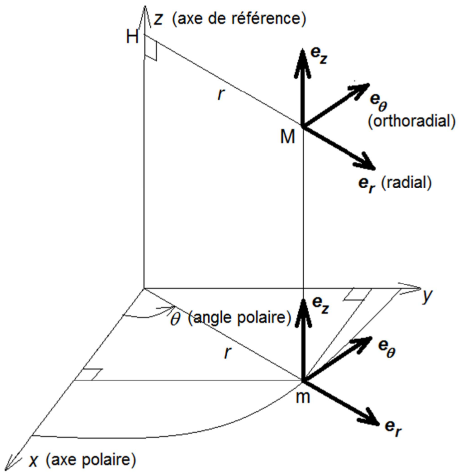
Systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques

COORDONNEES CYLINDRIQUES

Coordonnées cylindriques ou cylindro-polaires :

On considère 3 axes orthogonaux O*xyz* formant un trièdre direct, O*z* est l'axe de référence, O*x* l'axe polaire, M un point de l'espace, m sa projection sur le plan O*xy*, H sa projection sur O*z*.
Les coordonnées cartésiennes de M sont (*x*, *y*, *z*).
Les coordonnées cylindriques de M sont (*r*, θ, *z*) avec :

- r = Om = HM > 0 ;
- $\theta = \text{angle}(\vec{e}_x, \overrightarrow{Om})$;
  (angle orienté par le vecteur $\vec{e}_z$) ;
- $z = \overline{OH}$.



(r, θ) sont les coordonnées polaires de m).

Base locale des coordonnées cylindriques :

Base orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ telle que :

- $\vec{e}_z$ est le vecteur unitaire de l'axe O*z* ;
- $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire de la droite Om
  (dans le sens de $\overrightarrow{Om}$).

Remarque : si on se limite aux valeurs de θ dans l'intervalle [– π, + π], on a :

$\theta > 0$ s'il est dans le sens de $\vec{e}_\theta$, $\theta < 0$ s'il est en sens inverse de $\vec{e}_\theta$.

Les vecteurs de la base locale s'expriment dans la base fixe par les relations :

$$\vec{e}_r = \cos\theta.\vec{e}_x + \sin\theta.\vec{e}_y \quad et \quad \vec{e}_\theta = -\sin\theta.\vec{e}_x + \cos\theta.\vec{e}_y$$

On a donc :

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \text{ et } \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r .$$

Dériver un vecteur unitaire du plan O*xy* par rapport à l'angle θ, c'est le faire pivoter de + $^{\pi}/_{2}$.

Coordonnées du vecteur position dans la base locale et relations de passage :

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z = r.\vec{e}_r + z.\vec{e}_z$$

$$x = r.\cos\theta\,; \quad y = r.\sin\theta\,; \quad r = \sqrt{x^2+y^2}\ ; \quad \tan\theta = {}^{y}/_{x}.$$

Grandeurs infinitésimales en coordonnés cylindriques :

Elément de longueur : $d\vec{L} = dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta + dz.\vec{e}_z$

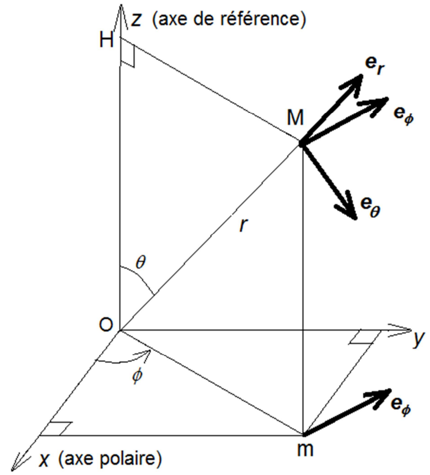
Elément de volume : $dV = r.dr.d\theta.dz$

COORDONNEES SPHERIQUES

Coordonnées sphériques :

Les coordonnées sphériques de M sont (r, θ, φ) avec :

- r = OM > 0 ;
- $\phi = \text{angle}(\vec{e}_x, \overrightarrow{Om})$ (orienté par $\vec{e}_z$).
- $\theta = \text{angle}(\vec{e}_z, \overrightarrow{OM})$
  (non orienté, compris dans [0, + π])



Base locale des coordonnées sphériques :

Base orthonormée directe $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ telle que :

- $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire de la droite OM
  (dans le sens de $\overrightarrow{OM}$) ;
- $\vec{e}_\theta$ est tangent au cercle du plan OHMm de centre O et rayon *r.*
- $\vec{e}_\phi$ est donc le vecteur orthoradial des coordonnées cylindriques.

Coordonnées du vecteur-position dans la base locale et relations de passage :

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z = r.\vec{e}_r$$

$$x = r.\sin\theta.\cos\phi\,; \quad y = r.\sin\theta.\sin\phi\ ; \quad z = r.\cos\theta\,; \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ; \quad \tan\phi = {}^{y}/_{x}.$$

Grandeurs infinitésimales en coordonnés sphériques :

Elément de longueur : $d\vec{L} = dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta + r.\sin\theta.d\phi.\vec{e}_\phi$

Elément de volume : $dV = r^2.\sin\theta.dr.d\theta.d\phi$

Elément de surface : $dS = r^2.\sin\theta.d\theta.d\phi$ (sur la sphère de rayon *r*).