MPSI 1 - DS 7 - 06/04/2022

Consignes générales :

- L'ordre est indifférent, mais on séparera clairement les exercices ;
- il est conseillé de tous les aborder (difficulté progressive dans un exercice).
- Toute question, même qualitative, appelle une réponse argumentée.
- La qualité de la rédaction (*français* et *écriture mathématique*) sera notée.
- La qualité de la présentation également : soin, aération, $\boxed{\text{résultats encadrés}}$.
- Une application numérique sans unité explicite et appropriée ne sera pas prise en compte.
- Pour le nombre de chiffres significatifs à conserver pour le résultat final, on s'aligne sur la donnée la moins précise, avec au moins 2 chiffres significatifs (sauf indication contraire).

1- SATELLITES ARTIFICIELS DE LA TERRE

On se place en référentiel géocentrique galiléen.

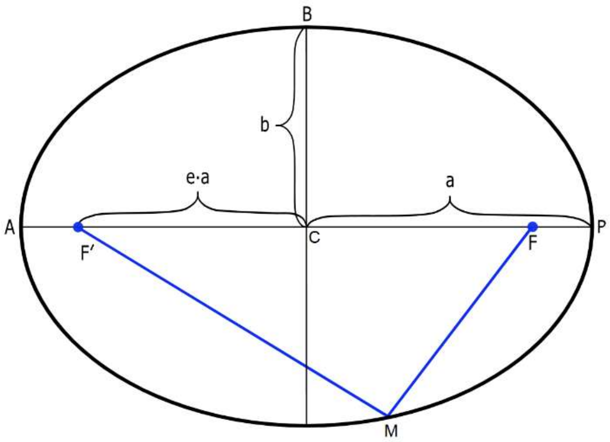
1. On note G la constante de la gravitation, M la masse de la Terre ($6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg), R son rayon ($6{,}4 \cdot 10^{3}$ km), g_0 l'accélération de la pesanteur au sol. Justifier que $g_0 R^2 = GM$.
2. Exprimer et calculer numériquement la « première vitesse cosmique » v_1, autrement dit la vitesse minimale de satellisation, par l'étude directe d'une orbite circulaire d'altitude nulle.

Le 4 octobre 1957, l'Union soviétique lançait Spoutnik 1, le premier satellite artificiel en orbite autour de la Terre. Le 1er février 1958, Explorer 1, lancé à partir de Cap Canaveral en Floride, devient le premier satellite américain à entrer en orbite. Le satellite fait une dernière transmission d'informations le 23 mai 1958 avant que sa batterie ne meure ; après avoir effectué près de 56 000 orbites, il entre dans l'atmosphère le 31 mars 1970, se désintégrant au-dessus de l'océan Pacifique. Son compteur Geiger aura permis la découverte des ceintures de van Allen, confirmées par Explorer 3 (mars à juin 1958). https://perspective.usherbrooke.ca/bilan/servlet/BMEve/1510.

De son côté, le site https://boowiki.info/art/us-satellites-artificiels/explorer-1.html nous apprend que l'excentricité de l'orbite valait 0,139849.

---

3. Estimer la période orbitale d'Explorer 1, et calculer les caractéristiques suivantes de l'orbite : demi-grand axe a, altitude au périgée z_P, altitude à l'apogée z_A.
4. Calculer la vitesse maximale du satellite sur cette orbite.
5. L'ellipse de foyers F et F' est le lieu des points M tels que $MF + MF' = c^{te}$ (cf. figure) ; montrer que cette constante vaut $2a$.
6. L'origine étant en F, l'ellipse a pour équation polaire $r = \frac{p}{1+e\ \cos\theta}$;
montrer que $p = a(1-e^2)$, puis que $p = b^2/a$.
7. Un mobile de masse m décrit autour de la Terre une ellipse de grand axe $AP = 2a$.
Exprimer la conservation en A et P de l'énergie E, et celle du moment cinétique L calculé au centre de la Terre F ; en déduire l'expression de E en fonction de GM, m et a.



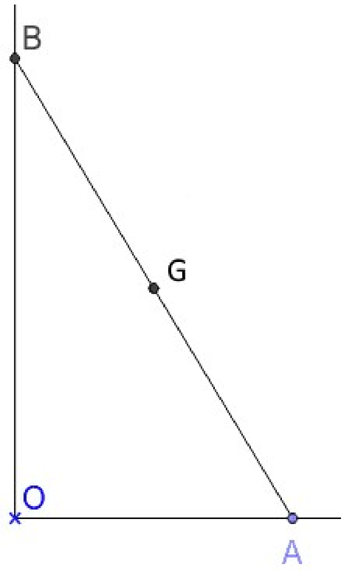
8. Exprimer E et L en B ; exprimer v_B, et montrer que $p = \frac{(L/m)^2}{GM}$.

2- ECHELLE APPUYEE CONTRE UN MUR

Une échelle (homogène, masse m et longueur $2L$) repose sur le sol (une extrémité A sur Oy) et s'appuie sur un mur (extrémité B sur Oz ascendant).

On utilisera l'angle α entre la verticale descendante BO et l'échelle.

Son moment d'inertie est $J = \frac{4mL^2}{3}$ pour une rotation d'axe Ax.



1. Le trièdre $Oxyz$ étant direct, quel est le sens positif de rotation autour de Ax : horaire ou anti-horaire ?
   Exprimer les coordonnées de G en fonction de L et α ; commenter.
2. On notera 'N' les forces de contact normales et 'T' les tangentielles ; il existe un frottement solide de coefficient μ_S en A.

Dans un premier temps, l'échelle étant peu inclinée par rapport au mur, on considère que la force T_B est négligeable.
Poser les équations caractérisant l'équilibre de l'échelle ; les résoudre pour obtenir T_A, N_A, N_B en fonction de mg et α. Vérifier la cohérence des résultats pour $\alpha \cong 0$.

Jusqu'à quelle valeur de l'angle l'équilibre est-il possible dans ce modèle si $\mu_S = 0{,}50$?

3. Reprendre les équations de l'équilibre en prenant en compte un coefficient de frottement solide de valeur μ_M en B ; montrer qu'à la limite de glissement en A et B, on a : $\tan \alpha = \frac{2\mu_S}{1-\mu_S\mu_M}$.
4. Calculer les valeurs de l'angle limite pour $\mu_M \in \{\ 0\ ;\ 0{,}1\ ;\ 0{,}2\ ;\ 0{,}3\ \}$; commenter.
5. On envisage le mouvement de l'échelle dans l'hypothèse simplificatrice où il n'y aurait *aucun frottement*. Justifier sans calculs que la réaction du sol en A ne soit pas l'opposé du poids.
   Établir les trois équations reliant les forces à $\alpha(t)$, en déduire l'équation différentielle en $\alpha(t)$.
6. Simplifier et résoudre au début de la chute, l'échelle étant quasi-verticale et immobile à $t = 0$.

3- SOLUBILITE - PRECIPITATION

1. Le strontium Sr (Z = 38) est un métal mou, gris-jaune, qui doit son nom à la ville de Strontian, en Écosse. Le pK_S du sulfate de strontium (Sr^{2+}, SO_4^{2-}) vaut 6,5 à la température de travail.
   Calculer sa solubilité molaire *s* dans l'eau pure.
2. On ajoute $SrSO_4$ solide à une solution de sulfate de sodium 0,1 mol·L^{-1} (ce sel étant totalement dissous) ; calculer la solubilité *s'* de $SrSO_4$ dans cette solution ; qu'a-t-on mis en évidence ?

****

3. L'hydroxyde d'aluminium $Al(OH)_3$ est un sel peu soluble, de pK_S = 33.
   Par ailleurs, il réagit selon : $Al(OH)_3 + OH^- \leftrightarrow Al(OH)_4^-$, de constante K = 100.
   Expliquer pourquoi l'hydroxyde d'aluminium en solution aqueuse peut se comporter aussi bien en tant qu'acide qu'en tant que base ? Quel nom donne-t-on à une telle espèce ?
4. On verse de la soude concentrée (donc à volume constant) dans un becher contenant initialement du nitrate d'aluminium $Al(NO_3)_3$, totalement dissous, à la concentration $c_0 = 10^{-3}$ mol·L^{-1}.
   a) Expliquer qualitativement pourquoi, dans un premier temps, un précipité va apparaître, qui va disparaître si on continue l'apport de soude.
   b) Calculer les pH d'apparition puis de disparition totale du précipité.

— = FIN = —

SOLUBILITE - PRECIPITATION - *corrigé*

1. $K_S = [Sr^{2+}]\,[SO_4^{2-}] = s^2 = 3{,}2\ 10^{-7}$ => $\mathbf{s = 5{,}6 \cdot 10^{-4}\ mol \cdot L^{-1}}$.
2. $K_S = [Sr^{2+}]\,[SO_4^{2-}] = s'\cdot(s'+0{,}1) = 3{,}2\cdot10^{-7}$ => **$s' = 3{,}2\cdot10^{-6}$ mol·L^{-1} < s : effet d'ion commun**.
3. Par dissolution, $Al(OH)_3$ libère des ions OH^-, c'est donc une base.
   Mais $Al(OH)_3$ peut aussi fixer un ion OH^-, ce qui est un comportement acide; bilan : **ampholyte**.
4. a) Il y a d'abord formation de $Al(OH)_3$ qui précipite, puis quand il y a davantage d'ions hydroxyde il y a redissolution de ce sel par formation du complexe $Al(OH)_4^-$.
   b) **limite d'apparition** : $[Al^{3+}] = c_0$ <u>et</u> $[Al^{3+}][OH^-]^3 = K_S$, d'où $[OH^-] = 10^{-10}$ mol·L^{-1} et **pH = 4**.
   limite de disparition : $[Al(OH)_4^-] = c_0$ <u>et</u> $[Al^{3+}][OH^-]^3 = K_S$ <u>et</u> $[Al(OH)_4^-] = K\cdot[OH^-]$
   d'où $[OH^-] = c_0/K = 10^{-5}$ mol·L^{-1} et **pH = 9** ;
   on vérifie que $[Al^{3+}] = K_S/[OH^-]^3 = 10^{-18}$ mol·L^{-1} est parfaitement négligeable.

SATELLITES ARTIFICIELS DE LA TERRE - *corrigé*

1) Au sol, une masse m subit $mg_0 \simeq \frac{\mathcal{G}Mm}{R^2}$ d'où $\underline{g_0R^2 = \mathcal{G}M}$.

2) Enréf. géocentrique, dans la base de Frenet : $m\frac{v^2}{r}\vec{N} + m\dot{v}\vec{T} = \frac{\mathcal{G}Mm}{r^2}\vec{N}$.
Cela prouve l'uniformité du mvmt, avec $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r}} \simeq \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{R}}$ pour un orbite basse.
Avec le résultat précédent, on obtient $\boxed{v_1 \simeq \sqrt{g_0R} \simeq 7{,}9\ km/s}$.

3) $56\cdot10^3$ orbites en 12 ans + février + mars + 3 jours pour années bissextiles (60, 64, 68).
soit une période orbitale proche de $\frac{(365\times12+28+31+3)\times86400}{56\cdot10^3} \simeq \boxed{6{,}85\cdot10^3 s}$.
Par la 3e loi de Kepler : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2} = g_0R^2/4\pi^2 \Rightarrow \boxed{a \simeq 7{,}82\cdot10^3 km}$.
On a $r_P = a(1-e) = R + z_P$ d'où $\underline{z_P \simeq 325\ km}$; de m̂ $r_A = a(1+e) \Rightarrow \underline{z_A \simeq 2{,}5\cdot10^3 km}$.

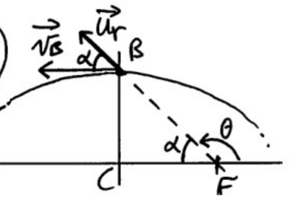
4) $v_{max} = v_P$ t.q. $-\frac{\mathcal{G}Mm}{2a} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r_P} + \frac{1}{2}mv_P^2$, d'où $\boxed{v_P = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{a}\cdot\frac{1+e}{1-e}} \simeq 8{,}2\ km/s}$.

5) En appliquant MF+MF'= au point P ou au point A, on trouve $\boxed{MF+MF' = 2a}$.

7) $E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_A} = E_P = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_P}$ et $mr_Av_A = mr_Pv_P$ (car $\vec{v} \perp \vec{r}$ en ces points)
(Il faut se débarasser des vitesses (pour trouver $E = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2a}$ connue).
$\rightarrow v_A^2 = \frac{2E}{m} + \frac{\mathcal{G}M}{r_A}$ et $v_P^2 = \frac{2E}{m} + \frac{\mathcal{G}M}{r_P}$, tandis que $r_A^2v_A^2 = r_P^2v_P^2$, ce qui conduit
à $\frac{2E}{m}r_A^2 + \mathcal{G}Mr_A = \frac{2E}{m}r_P^2 + \mathcal{G}Mr_P$
$\Leftrightarrow \frac{2E}{m}(r_A^2 - r_P^2) = -\mathcal{G}M(r_A - r_P) \Leftrightarrow \boxed{E = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2a}}$ (car $r_A + r_P = 2a$)

6) $\left.\begin{array}{l} r_P = \frac{p}{1+e} \text{ et } r_A = \frac{p}{1-e} \\ r_P + r_A = 2a \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{p = a(1-e^2)}$

En B, d'après Q5 : $BF + BF' = 2a$, avec $BF'^2 = b^2 + (e.a)^2 = BF^2 = a^2$
et $BF = BF'$
d'où $\boxed{b^2 = a^2(1-e^2) = a\cdot p}$, cqfd.

8) 

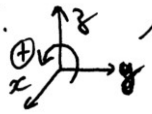
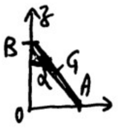
$\left.\begin{array}{l} E_B = -\frac{\mathcal{G}Mm}{a} + \frac{1}{2}mv_B^2 \text{ car } FB = a \\ E_B = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2a} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{v_B^2 = \frac{\mathcal{G}M}{a}}$

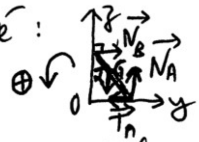
$\left.\begin{array}{l} L(B) = m\,FB\cdot v_B\cdot \sin\alpha \\ \sin\alpha = \frac{CB}{FB},\ FB = a \end{array}\right\} \Rightarrow L^2(B) = m^2 a^2 \cdot \frac{\mathcal{G}M}{a}\,\frac{b^2}{a^2}$

Comme on a vu que $b^2 = a\cdot p$, en reportant il vient $\boxed{p = \frac{(L/m)^2}{\mathcal{G}M}}$, cqfd.

ÉCHELLE APPUYEE CONTRE UN MUR - *corrigé*

1. Le trièdre $Oxyz$ étant direct, Ox pointe vers le lecteur ; le sens positif de rotation est anti-horaire.

1.  sens anti-horaire  $\begin{cases} y_G = L\sin\alpha \\ z_G = L\cos\alpha \end{cases}$ G décrit 1/4 cercle lors de la chute.

2. T_B négligé : 

TCM : $\vec{N_B} + \vec{N_A} + \vec{T_A} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \text{sur } Oy : N_B = T_A \\ \text{sur } Oz : N_A = mg \end{cases}$

TSMC ~~pour~~ Ax : $mgL\sin\alpha = N_B \cdot 2L\cos\alpha$

Avec 3 éq. pour 3 forces inconnues, on résout : $\underline{N_B = T_A = \frac{1}{2} mg\tan\alpha}$ et $\underline{N_A = mg}$.

$\mu = 1/2 \Rightarrow T_A \leq \frac{1}{2} N_A \Leftrightarrow \tan\alpha \leq 1 \Leftrightarrow \underline{\alpha \leq \arctan(1) \simeq 45°}$. ↳ 0 si échelle verticale, plus d'appui sur le mur.

3) Reprenons les éq. dynamiques : $\begin{cases} \text{TCI sur } Oy : N_B \overset{①}{=} T_A \text{ et sur } Oz : T_B + N_A \overset{②}{=} mg \\ \text{TSMC p/r } Az : mgL\sin\alpha \overset{③}{=} T_B \cdot 2L\sin\alpha + N_B \cdot 2L\cos\alpha \end{cases}$

<u>A la limite</u> : $T_B = \mu_M N_B$ et $T_A = \mu_S N_A$ qu'on reporte dans ③ en utilisant ① ② :

$\left.\begin{array}{l} ① : N_B = T_A = \mu_S N_A \\ ② : T_B = \mu_M N_B = mg - N_A \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_M N_B = \mu_M \mu_S N_A = mg - N_A$

$\Leftrightarrow N_A = \frac{mg}{1 + \mu_S \mu_M}$

③ s'écrit alors : $\cancel{mg}\sin\alpha = 2\sin\alpha \cancel{mg}\left(1 - \frac{1}{1+\mu_S\mu_M}\right) + \frac{2\mu_S \cancel{mg}}{1+\mu_S\mu_M}\cos\alpha$

$\Leftrightarrow (1+\mu_S\mu_M)\sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot \mu_S\mu_M + 2\mu_S\cos\alpha \Leftrightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{2\mu_S}{1-\mu_S\mu_M}}$

(vérif. : 1 si $\mu_M = 0$)

4) $\mu_S = 0,5$ et <u>$2L = 4$m</u>

μ_M	0	0,1	0,2	0,3
α_{lim}	45°	46,5°	48°	49,6°
(m) x_A	2,83	2,90	2,97	3,05
(m) z_B	2,83	2,75	2,68	2,59
$\frac{N_A}{mg}$	1	0,95	0,91	0,87

) variations de 20cm p/r $\mu_M = 0$, ce qui représente $\simeq$ 7%.

) une partie du poids étant compensé par T_B.

5) L'échelle glisse $\Rightarrow \underline{z_G \downarrow \overset{TCI}{\Rightarrow} \sum \vec{F}\cdot\vec{u_z} < 0 \Rightarrow N_A < mg}$ (avec $T_B = 0$).

Toujours TCI et TSMC : $\begin{cases} N_B \overset{①}{=} m\ddot{y}_G \text{ selon } Oy \text{ , } m\ddot{z}_G \overset{②}{=} N_A - mg \\ J\ddot{\alpha} \overset{③}{=} -N_B 2L\cos\alpha + mgL\sin\alpha \end{cases}$ avec $\begin{cases} y_G = L\sin\alpha \\ z_G = L\cos\alpha \end{cases}$

② donne N_A si $\alpha(t)$ connue ; ① et ③ $\Rightarrow J\ddot{\alpha} = -(-mL\sin\alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + mL\cos\alpha\, \ddot{\alpha}) \cdot 2L\cos\alpha + mgL\sin\alpha$

Si $\alpha \simeq 0$: $\cos\alpha \simeq \alpha$ et $\sin\alpha \simeq 1$:

③ devient donc : $J\ddot{\alpha} = -2mL^2(\ddot{\alpha} - \alpha\cdot\dot{\alpha}^2) + mgL\alpha \Leftrightarrow (J + 2mL^2)\ddot{\alpha} = \alpha(mgL + 2mL^2\dot{\alpha}^2)$

6) Au début du mvmt, $\dot{\alpha} \simeq 0$ et $\ddot{\alpha} = k^2 \cdot \alpha$ avec $k = \sqrt{\frac{mgL}{J + 2mL^2}}$, $[k] = T^{-1}$

$\left.\begin{array}{l} \alpha(t) = Ce^{kt} + C'e^{-kt} \\ \alpha(0) = \varepsilon \text{ , } \dot{\alpha}(0) = 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\alpha(t \simeq 0) = \varepsilon \cdot ch(kt)}$

chute rapidement accélérée, d'autant plus que le terme $\dot{\alpha}^2 \uparrow$!

— = FIN = —