PETITS EXERCICES DE CALCUL VECTORIEL

Il peut y avoir plusieurs façons de répondre aux questions posées ; par exemple, il existe une " formule " donnant la distance d'un point à une droite. Mais l'objectif est ici de se ramener à des calculs de produits scalaires ou vectoriels.

Trièdre direct

On donne le vecteur $\vec{u} = -\vec{i} - \vec{j}$, où $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée directe. Déterminer $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, -\vec{k}, \vec{v})$ oriente un trièdre direct et en déduire la base orthonormée associée.

Angles entres vecteurs

NB : les caractères romains gras désignent des vecteurs : **u**, **v**…

On se place dans un repère cartésien muni d'une base orthonormée directe. On considère dans cette base les vecteurs **u**,**v**,**v′** de coordonnées respectives : (1,2,3), (1,b,3), (1,2,c).

1. Déterminer les valeurs de b et de c telles que **v** et **v′** soient perpendiculaires à **u**.
2. Calculer les coordonnées du vecteur **w** unitaire tel que (**u**,**v**,**w**) soit une base directe.
3. Soit α l'angle (en valeur absolue) entre les vecteurs **v** et **v′** ; calculer $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

Droites en dimension 2

On donne le vecteur $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, où $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée directe associée à un repère cartésien Oxyz.

1. Déterminer l'équation de la droite D_1 passant par le point A(1,0,0) et orientée par $\vec{u}$.
2. Déterminer l'équation de la droite passant par A(1,0,0) et perpendiculaire à D_1.
3. Déterminer l'équation de la droite D_2 passant par les points A(1,0,0) et B(2,2,0), puis l'équation de la droite qui lui est parallèle, passant par l'origine.
4. Calculer l'angle entre les droites D_1 et D_2.
5. Calculer la distance du point B à la droite D_1.

Droite et Plan en dimension 3

On donne le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, où $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée directe associée à un repère cartésien Oxyz.

1. Soit un point M(x,y,z) appartenant à la droite passant par O et orientée par $\vec{u}$: caractériser cette droite (relations entre x, y et z).
2. Soit un point M(x,y,z) appartenant au plan Π passant par le point A(1,1,0) et perpendiculaire à $\vec{u}$: caractériser ce plan (relations entre x, y et z).
3. Déterminer une base orthonormée du plan précédent.

Trièdre direct

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)$ est une BOND si $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$, $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 1$

On a bien $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$ car $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$

$\vec{u} = -\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow u = \sqrt{2}$ donc $\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}$ est unitaire ; $-\vec{k}$ l'étant aussi,

il ne reste qu'à calculer $\vec{u}_3 = (\vec{u} \wedge (-\vec{k}))/\sqrt{2}$ soit :

$\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((-\vec{i}-\vec{j}) \wedge (-\vec{k})\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}\wedge\vec{k} + \vec{j}\wedge\vec{k})$, sachant que $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est directe, d'où $\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{j}+\vec{i})$.

$\mathcal{B} = \left(\frac{-\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}, -\vec{k}, \frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}\right)$

Angles

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1 + 2b + 9$ s'annule pour $b = -5$.

$\vec{u}\cdot\vec{v}' = 1 + 4 + 3c$ s'annule pour $c = -5/3$

2) Calculons $\vec{w} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$: $\vec{u}\begin{vmatrix}1\\2\\3\end{vmatrix}$ $\vec{v}\begin{vmatrix}1\\-5\\3\end{vmatrix} \Rightarrow \vec{u}\wedge\vec{v}\begin{vmatrix}21\\0\\-7\end{vmatrix}$

$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \sqrt{441+49} = 7\sqrt{10}$ donc $\vec{w}\begin{vmatrix}3/\sqrt{10}\\0\\-1/\sqrt{10}\end{vmatrix}$

3) $\vec{v}\cdot\vec{v}' = v\cdot v'\cos\alpha$

$\|\vec{v}\wedge\vec{v}'\| = v\cdot v'\sin\alpha$

$\vec{v}\cdot\vec{v}' = 1 - 10 - 5 = -14$

$v = \sqrt{35}$; $v' = \sqrt{70/9}$

$\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{5}$; $\boxed{\alpha \simeq 148°}$

$\vec{v}$	$\vec{v}'$	$\vec{v}\wedge\vec{v}'$
1	1	7/3
-5	2	44/3
3	-5/3	7

de norme $\frac{\sqrt{686}}{3}$; Alors $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2\cdot 7^3}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{35}}\cdot\frac{3}{\sqrt{70}}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$

Droites dans le plan

1) $\forall M \in D_1$, $\vec{AM}\wedge\vec{u} = \vec{0}$, d'où : $y = \frac{4}{3}(x-1)$

2) $\forall M \in D_1'$, $\vec{AM}\cdot\vec{u} = 0$, d'où : $y = -\frac{3}{4}(x-1)$

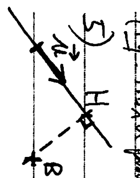
3) $\forall M \in D_2$, $\vec{AM}\wedge\vec{AB} = \vec{0}$, d'où : $y = 2(x-1)$

Avec la même pente (2), la droite $y = 2x$ passe par O.

4) $\vec{AB}\cdot\vec{u} = AB\cdot u\cdot\cos\alpha$ permet de calculer α :

$\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}3\\4\end{vmatrix}$ $AB = \sqrt{5}$; $u = \sqrt{25}$; $\vec{AB}\cdot\vec{u} = 11$

(rq : $\vec{AB}\wedge\vec{u}$ possible aussi) d'où $\cos\alpha = \frac{11}{5\sqrt{5}}$, $\alpha \simeq 10{,}3°$

5) 

$d = HB$ avec $\vec{BH}\perp\vec{u}$ soit $\vec{BH}\cdot\vec{u} = 0$ $\begin{vmatrix}x_H-2\\y_H-2\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}3\\4\end{vmatrix}$

On a $3(x_H-2) + 4(y_H-2) = 0$

et $y_H = \frac{4}{3}(x_H-1)$ car $H \in D_1$

On en déduit $x_H = \frac{58}{25}$ et $y_H = \frac{44}{25}$, d'où $d = \frac{2}{\sqrt{25}}$.

Droites en 3D, et plan

1) $\forall M \in D$, $\vec{OM} = k\cdot\vec{u}$ donc $z = y = x (= k)$

2) $\forall M \in \Pi$, $AM \perp \vec{u}$ donc $(x-1)\cdot 1 + (y-1)\cdot 1 + z\cdot 1 = 0$

$\Leftrightarrow x + y + z = 2$

3) Prenons, au hasard, M(1,0,1) appartenant au plan.

$\vec{AM}\begin{vmatrix}0\\-1\\1\end{vmatrix}$ donc $\frac{\vec{AM}}{\sqrt{2}}$ est un vecteur unitaire cherché.

Le 2e s'obtient par $\frac{\vec{u}\wedge\vec{AM}}{\|\vec{u}\wedge\vec{AM}\|}$ de coordonnées $\begin{vmatrix}2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{vmatrix}$