

NB : la constante $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$, les expressions de $C_{v,m}$ et $C_{p,m}$ sont considérées connues.

TRANSFORMATIONS DIVERSES

Gaz parfait – gaz réel

Une mole de GPM est *lentement* comprimée de l'état A ($T_A = 300 \text{ K}$, $V_A = 5 \text{ L}$) à l'état B ($T_B = T_A$, $V_B = 0,5 \text{ L}$). On envisage deux procédés différents :

(1) : compression isotherme ; (2) : compression isochore ($A \rightarrow I$) par contact avec une source à T_I suivie d'un refroidissement isobare ($I \rightarrow B$) par contact avec une source à T_A .

- 1- Représenter les transformations décrites en coordonnées de Clapeyron.
- 2- Calculer littéralement et numériquement $W(1)$ et $Q(1)$, puis $W(2)$ et $Q(2)$; commenter.
- 3- Calculer dans les deux cas la variation d'entropie du gaz et vérifier le second principe.
- 4- On fait subir la transformation isotherme $A \rightarrow B$ à un gaz réel d'équation d'état molaire $(p + a/V^2)\cdot V = RT$, dont l'énergie interne molaire est $U = 3RT/2 - a/V$; $a = 0,135 \text{ uSI}$.
Préciser l'unité de a . Écrire l'équation d'état pour n moles.
Calculer littéralement et numériquement W et Q ; commenter.

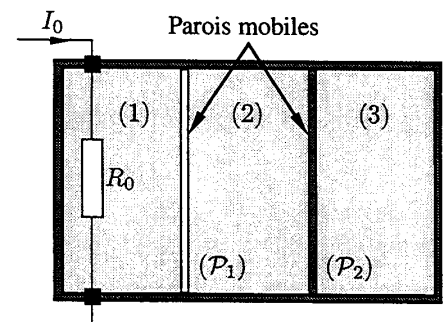
Transformations couplées (loi de Laplace)

Un récipient à parois rigides et calorifugées est divisé en trois compartiments étanches par deux cloisons mobiles sans frottement (P_1) et (P_2). La cloison (P_1) est *diathermane*, (P_2) est *athermane*. Les trois compartiments contiennent chacun une mole d'un gaz parfait diatomique de coefficient de Laplace γ .

Un générateur électrique fournit de l'énergie au gaz par l'intermédiaire d'un résistor de résistance R_0 , de capacité thermique négligeable, parcouru par un courant d'intensité constante I_0 pendant une durée τ .

Dans l'état initial, les gaz ont même température T_0 , même pression p_0 et donc même volume V_0 .

L'intensité du courant est suffisamment faible pour que le système évolue lentement. On arrête le chauffage lorsque la température du compartiment (3) $T_{3f} = aT_0$ avec $a > 1$; $a = 1,5$ et $\gamma = 1,4$.



- 1- Exprimer la pression finale p_f ainsi que le volume V_{3f} du gaz en fonction de p_0 , a et γ dans le compartiment (3) en fonction de V_0 , a et γ . A.N..
- 2- Exprimer le volume final V_{1f} du gaz dans le compartiment (1) en fonction de V_0 , a et γ . AN. En déduire la température finale T_{1f} du gaz (1) en fonction de T_0 , a et γ . AN.
1. Exprimer le travail W_g fourni par le générateur et le transfert thermique à travers (P_1) en fonction des températures T_{if} . A.N..

Détentes adiabatiques

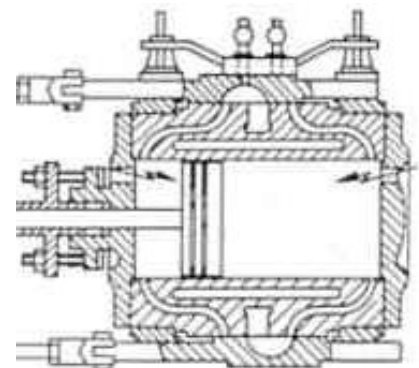
Une mole de diazote (GP diatomique de coefficient $\gamma = 7/5$) est contenue dans un cylindre vertical fermé par un piston horizontal mobile, de masse négligeable et de section $S = 50 \text{ cm}^2$, surmonté de l'atmosphère de pression constante ($P_0 = 1 \text{ bar}$). Parois et pistons sont *athermanes*. Initialement, un morceau de glace carbonique de masse $M = 10 \text{ kg}$ repose sur le piston et la température du gaz vaut 300 K .

- 1) On laisse la glace carbonique se sublimer lentement (la *sublimation* est le passage direct de l'état solide à l'état gazeux). Qualifier la transformation, calculer la pression et la température finales du gaz.
- 2) On enlève brusquement M : qualifier la transformation, calculer de même la pression et la température finales du gaz. Comparer les résultats obtenus
- 3) Calculer dans les deux cas la variation d'entropie du gaz ; conclure.

Moteur LENOIR

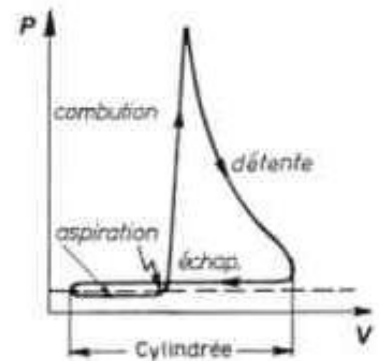
Description du moteur LENOIR : (<http://www.histomobile.com/>)

« Sa disposition consistait en un cylindre horizontal dans lequel coulissait un piston qui aspirait le mélange d'air et de gaz jusqu'à la moitié de la course. A ce moment, le mélange gazeux – toujours à pression atmosphérique – était enflammé par une étincelle, et le même piston, pendant la même course, fournissait un effort moteur jusqu'à l'extrémité de son déplacement. Après franchissement du point mort, un cycle identique se déroulait en sens inverse, sur l'autre face du piston : fonctionnement "à double effet". Le cycle de fonctionnement s'accomplissait en un aller-retour : on peut donc le considérer comme un moteur "deux-temps". »



Moteur à gaz LENOIR

Considérons ci-contre le diagramme de WATT du moteur: lors de l'aspiration, un mélange d'air et de gaz inflammable pénètre dans le cylindre ; la combustion rapide entraîne une augmentation de pression et les gaz brûlés poussent le piston avant d'être rejetés dans l'atmosphère (échappement).



On assimilera ce fonctionnement à un cycle fermé décrit par n moles d'un gaz parfait de coefficient de Laplace constant γ : dans cette modélisation, l'échappement est alors considéré comme un refroidissement isobare avant de recommencer un cycle pendant lequel la combustion est formellement remplacée par un apport d'énergie sous forme de transfert thermique.

- 1- Discuter les pressions d'admission et d'échappement. Dans quelle mesure a-t-on un cycle moteur ? Modéliser ce cycle par des transformations simples (A→B→C→A) compte tenu des textes ci-dessus.
- 2- On note V le volume du cylindre, p_A et T_A les pression et températures minimales au cours du cycle, et τ le rapport des pressions extrêmes. Déterminer la valeur de τ en fonction de γ .
- 3- Identifier sur le cycle modèle ABC le coût énergétique de fonctionnement du moteur, du point de vue de son utilisateur ; en déduire l'expression de l'efficacité $\eta = (\text{recette énergétique}) / (\text{dépense énergétique})$, en fonction des températures.
- 4- Exprimer η en fonction de γ . A.N. si $\gamma \cong 1,4$.
- 5- Reprendre le calcul théorique de η en ne supposant plus $V_C = 2V_A$; discuter le choix de τ .

Complément historique :

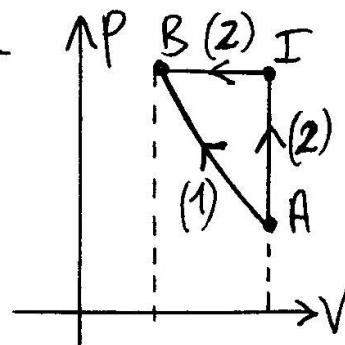
Déposé le 24 janvier 1860, le brevet de Lenoir (d'origine belge, installé à Paris) se rapportait à un moteur actionné par le gaz d'éclairage mélangé d'air (à pression atmosphérique) et enflammé par l'électricité. Bien que lent et d'un faible rendement (*par suite de l'absence de compression initiale*) il s'en vendit 500 (sans compter ceux construits sous licence) en moins de 5 ans, car il était sûr et facile à alimenter à poste fixe dans les immeubles équipés pour l'éclairage au gaz : les artisans furent nombreux à l'adopter.

Par un second brevet, déposé le 18 avril 1860, Lenoir voulut adjoindre la possibilité d'utiliser d'autres formes de combustibles, tels les dérivés du pétrole, grâce à un carburateur. Cependant, la compression telle qu'elle intervient dans les moteurs modernes n'était toujours pas envisagée, et le rendement trop faible du moteur lui interdisait de propulser efficacement les véhicules automobiles. Il disparut rapidement (1875) après avoir toutefois inspiré les recherches de Nikolaus OTTO, co-inventeur (cf. BEAU DE ROCHAS) du cycle à quatre temps du moteur à explosion moderne ([http://fr.wikipedia.org/wiki/Nikolaus Otto](http://fr.wikipedia.org/wiki/Nikolaus_Otto)).

$(n=1 \text{ mole})$ gaz parfait - gaz réel

1) - 2) of cours: $W_{\text{isot}} = nRT \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = -nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

ici $W_{(1)} = R \cdot T_A \ln(10) \approx \underline{5,74 \text{ kJ}}$
 $Q_{(1)} = -W_{(1)}$ car $\Delta U_{(1)} = 0$



$W_{(2)} = W_{AI} + W_{IB} = 0 - P_B \cdot (V_B - V_I)$ car isoV puis isoP

$W_{(2)} = -\frac{nRT_B}{V_B} (V_B - V_A) = RT_A \left(\frac{V_A}{V_B} - 1\right)$; AN: $W_{(2)} \approx \underline{22,4 \text{ kJ}}$

$Q_{(2)} = Q_{AI} + Q_{IB} = nC_{v,m}(T_I - T_A) + nC_{p,m}(T_B - T_I)$

$= (T_A - T_I)(C_{p,m} - C_{v,m})$ car $n=1$ et $T_B = T_A$

$= T_A \cdot \left(1 - \frac{P_I V_I}{P_A V_A}\right) \cdot R = RT_A \cdot \left(1 - \frac{V_B}{V_A}\right) = -W_{(2)}$

Bilan: ΔU est le m^e car ne dépend que des états initial et final
 Par contre, W et Q dépendent du chemin suivi.

3) $\left[\frac{a}{V}\right] = [\text{énergie molaire}] \Rightarrow \underline{a \text{ en } \text{J} \cdot \text{mol}^{-2} \cdot \text{m}^3}$ (car V molaire)

ou $\left[\frac{a}{V^2}\right] = [\text{pression}]$, avec $[V] = [\text{volume molaire}] \Rightarrow a \text{ en } \underline{\text{Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}}$

$W = \int -P_{\text{ext}} \cdot dV \stackrel{(1)}{=} \int -p \cdot dV = \int_{V_A}^{V_B} \left(-\frac{RT_A}{V} + \frac{a}{V^2}\right) \cdot dV = -RT_A \ln \frac{V_B}{V_A} - \frac{a}{V_B} + \frac{a}{V_A}$

Q = ΔU - W par le 1^{er} ppe

$\Rightarrow Q = U_B - U_A - W = -\frac{a}{V_B} + \frac{a}{V_A} - W = RT_A \ln \frac{V_B}{V_A}$

$\hookrightarrow W \approx 5,50 \text{ kJ}$

$\rightarrow Q \approx -5,74 \text{ kJ}$

Bilan: gaz r^e. $U = f(T \text{ et } V) \Rightarrow \underline{\Delta U_{\text{isot}} \neq 0}$: 1^{re} loi de Joule non vérifiée.

Transformations couplées - correction

Transformations couplées

1) Loi de Laplace pour gaz ③ car adiabatique quasi-statique
 $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte} \Rightarrow \underline{P_f = P_0 a^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \approx 4,1 P_0}$

2) P_1 diathermante } \Rightarrow Vt. $P_1 = P_2$
 Transf. lente } $T_1 = T_2 \Rightarrow V_1(t) = V_2(t) = (3V_0 - V_3(t))/2$
 Laplace : $T \cdot V^{\gamma-1} = \text{cte} \Rightarrow \underline{V_{3f} = V_0 a^{\frac{1}{1-\gamma}} \approx 0,36 V_0} \Rightarrow \underline{V_{1f} = V_{2f} \approx 1,32 V_0}$

Loi G.P. : $P_f V_{1f} = n R T_{1f} = \frac{P_0 V_0 T_{1f}}{T_0} \Rightarrow T_{1f} = T_0 \frac{P_f}{P_0} \frac{V_{1f}}{V_0} \Leftrightarrow T_{1f} = \frac{1}{2} T_0 a^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} (3 - a^{\frac{1}{1-\gamma}}) \approx 5,45 T_0$

3) $W_{\text{géné}}$? Le plus simple est de raisonner sur le système des trois gaz (on néglige la capacité thermique du résistor) : $\Delta U_{123} = W_g$
 et par extensivité de U : $\frac{nR}{\gamma-1} (T_{1f} - T_0 + T_{2f} - T_0 + T_{3f} - T_0) = W_g$
 soit $\underline{W_g = \frac{nR}{\gamma-1} (2T_{1f} + T_{3f} - 3T_0) \approx 195 nT_0 \text{ (J)}}$

4) Q_{12} ? 1^{er} ppe pour gaz ① : $\Delta U_1 = Q_{12} + W_{12} + W_g$ donc $Q_{12} = \Delta U_1 - W_g - W_{12}$

$W_{12} = \int_{\text{éi}}^{\text{éf}} -P_{\text{ext}} \cdot dV_1$ où P_{ext} pour le gaz ① est $P_{\text{②}} = P_{\text{①}} = P_{\text{③}}$ car transf. γ -s.

Par loi de Laplace : $P_0 V_0^\gamma = P(t) V_3^\gamma(t)$, et $V_3 + 2V_1 = 3V_0 \Rightarrow dV_1 = -\frac{1}{2} dV_3$

On a donc : $W_{12} = \int_{V_{3,i}}^{V_{3,f}} -P_0 V_0^\gamma V_3^{-\gamma} \left(-\frac{1}{2} dV_3\right) = +\frac{1}{2} P_0 V_0^\gamma \left[\frac{V_3^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_{V_0}^{V_{3f}}$
 $= \frac{1}{2(1-\gamma)} (P_0 V_0^\gamma V_{3f}^{1-\gamma} - P_0 V_0^\gamma V_0^{1-\gamma})$ avec $P_0 V_0^\gamma = P_f V_{3f}^\gamma$
 $= \frac{1}{2(1-\gamma)} (P_f V_{3f} - P_0 V_0) = \frac{1}{2} \frac{nR}{1-\gamma} (T_{3f} - T_0) \approx 5,2 nT_0 \text{ (J)}$

$$Q_{12} = \frac{nR}{\gamma-1} \left(T_{1f} - T_0 - 2T_{1f} + 3T_0 - T_{3f} + \frac{1}{2} T_0 - \frac{1}{2} T_{3f} \right)$$

$$= \frac{nR}{\gamma-1} \left(-T_{1f} - \frac{1}{2} T_{3f} + \frac{5}{2} T_0 \right)$$

Bilan : W_g reçu par gaz ① : $195 nT_0 \text{ (J)}$
 W_{12} cédé par gaz ① : $-5,2 nT_0 \text{ (J)}$
 $\Delta U_1 = \frac{nR}{\gamma-1} (T_{1f} - T_0) \approx 92 nT_0 \text{ (J)}$
 Q_{12} cédé par ① à ② : $-98 nT_0 \text{ (J)}$

Aux arrondis près, on vérifie la conservation

Détentes (1 mole)

1) adiabatique q.s. $\Rightarrow p^{1-\gamma} \cdot T^\gamma = \text{cte}$ avec $p_f = p_0$.

$$p_i = Mg/s + p_0 \Rightarrow T_f = T_i \cdot \left(1 + \frac{Mg}{Sp_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$\approx 1,2 p_0 \quad \text{AN: } T_f \approx 0,95 \quad T_i \approx 284,8 \text{ K}$$

2) adiab. irréversible sous $p_{\text{ext}} = p_0 = \text{cte}$

⚠ on n'a pas $p(t) = p_0$ dans le gaz en cours de détente

$$W = \int -p_{\text{ext}} \cdot dV = -p_0(V_f - V_i) \stackrel{Q=0}{=} \Delta U = n C_{v,m} (T_f' - T_i)$$

$$V_f = \frac{nRT_f'}{p_f} = \frac{nRT_f'}{p_0} \text{ car \u00e9q. final avec } p = p_{\text{ext}} = p_0$$

$$V_i = \frac{nRT_i}{p_i} \text{ car \u00e9q. initial avec } p = p_{\text{ext}} = p_i = p_0 + \frac{Mg}{S}$$

$$\Rightarrow nR \left(\frac{p_0}{p_i} \cdot T_i - T_f' \right) = n \frac{R}{\gamma-1} (T_f' - T_i) \Rightarrow T_f' = \frac{1}{\gamma} \left[1 + (\gamma-1) \frac{p_0}{p_i} \right] T_i$$

NB: le gaz perd moins d'\u00e9nergie, donc travaille moins, pour la transp. irr\u00e9v.

$$\text{AN: } T_f' \approx 285,7 \text{ K}$$

3) $\Delta S = n C_{p,m} \ln \frac{T_f'}{T_i} - nR \ln \frac{p_f}{p_i}$ pour un GP; ici $\begin{cases} p_i = p_0 + \frac{Mg}{S} \\ p_f = p_0 \end{cases}$

$$= nR \cdot \ln \left(\frac{p_i \cdot T_i^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{p_f \cdot T_f'^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \right) \Rightarrow \text{dans la 1\u00e8re transp: } \Delta S = 0$$

Comme $T_f' > T_f$ (avec les m\u00eames pressions), on aura $\Delta S' > 0$.
Le syst. \u00e9tant thermiquement isol\u00e9, ce sont les entropies cr\u00e9es.

Moteur Lenoir - correction

1- A → **isochore** → B → **adiabatique** → C → **isobare** A, le tout quasi-statique *of course*
 nb : BC adiabatique plus réaliste qu'isoT pour un moteur, même poussif !

2- Laplace entre B et C : $(\tau \cdot p_A) V_A^\gamma = p_A (2V_A)^\gamma \Rightarrow \tau = 2^\gamma$.

3- **coût** = Q_{AB} et **gain** = $-\mathbf{W} = Q_{cycle} = Q_{AB} + Q_{CA} \Rightarrow \eta = 1 + \frac{Q_{CA}}{Q_{AB}}$

$\Rightarrow \eta = 1 + \frac{n \cdot C_p \cdot (T_A - T_C)}{n \cdot C_v \cdot (T_B - T_A)} \Rightarrow \eta = 1 + \gamma \cdot \frac{T_A - T_C}{T_B - T_A}$: il reste à relier les températures :

4- $\frac{T_B}{T_A} = \frac{p_B V_B}{p_A V_A} = \tau$ et $\frac{T_C}{T_A} = \frac{p_C V_C}{p_A V_A} = 2$ donc $\eta = 1 - \gamma \cdot \frac{1}{\tau - 1}$ soit : $\eta = 1 - \gamma \cdot \frac{1}{2^\gamma - 1} \cong 0,15$!

5- on repart de $\eta = 1 + \gamma \cdot \frac{T_A - T_C}{T_B - T_A}$ et on relie les températures :

on a tjs $\frac{T_B}{T_A} = \frac{p_B V_B}{p_A V_A} = \tau$

d'autre part : $\frac{T_C}{T_A} = \frac{p_C V_C}{p_A V_A} = \frac{V_C}{V_A} = \frac{1}{x}$ et :

Laplace entre B et C : $(\tau \cdot p_A) (x \cdot V)^\gamma = p_A V^\gamma \Rightarrow \tau = x^{-\gamma}$

et finalement : $\eta = 1 - \gamma \cdot \frac{x^{-1} - 1}{x^{-\gamma} - 1}$, décroît qd x augmente.

choix de $x = 1/2$ pas optimal mais permet un fonctionnement régulier par le « double effet » (2 cycles -décalés- en mm tps).

